FACULTÉ DES SCIENCES

GÉOMÉTRIE SUPÉRIEURE

UNIVERSITÉ DE PARIS

~~Paris,~~ Le Chesnay, le 17 juillet 1928.

Cher Monsieur,

J'ai bien reçu votre lettre, votre note et vos jolies cartes, dont je vous remercie. Je viens d'envoyer votre note à M Picard et je pense qu'elle paraîtra dans le numéro du 23 juillet. La génération que vous obtenez pour la surface qui représentent les polynomes harmoniques de degré donné est très intéressante. Une question connexe et qui se rattache à une théorie très générale est celle de la représentation d'un espace ~~Complexe~~ l'espace projectif complexe à n dimensions par une variété réelle à 2n dimensions dans un espace à courbure constante de telle sorte que les déplacements de l'espace projectif (supposé doué d'une métrique hermitienne elliptique par une forme d'Hermite définie) se traduisent ~~de la variété~~ par des déplacements de l'espace ambiant. Par exemple

les courbes qui ont un contact du 3e ordre satisfont à la condition

$$\frac{-\omega_1^2 e_{10} + \omega_1\omega_2(e_{31} - e_{20})}{\omega_1} = \frac{-\omega_2^2 e_{20} + \omega_1\omega_2(e_{32} - e_{10})}{\omega_2}$$

Avec les notations de mon mémoire $e_{10} = u\omega_1$, $e_{20} = v\omega_2$

$$u\omega_1^2 - v\omega_2^2 = 0$$

La démonstration est élémentaire et peut se faire dans la théorie des systèmes de Pfaff —

J'espère peut être voir M Čech au Congrès de Bologne. Vous seriez bien aimable à l'occasion de lui transmettre mes meilleurs compliments.

Bien cordialement à vous

E. Cartan

si x, y, z désignent les coordonnées homogènes d'un point du plan projectif complexe (avec la normalisation $x\bar{x} + y\bar{y} + z\bar{z} = 1$), on a la variété

$$X_1 = x\bar{x} - y\bar{y}$$
$$X_2 = \frac{-x\bar{x} - y\bar{y} + 2z\bar{z}}{\sqrt{3}}$$
$$X_3 = y\bar{z} + z\bar{y}$$
$$X_4 = i(y\bar{z} - z\bar{y})$$
$$X_5 = z\bar{x} + x\bar{z}$$
$$X_6 = i(z\bar{x} - x\bar{z})$$
$$X_7 = x\bar{y} + y\bar{x}$$
$$X_8 = i(x\bar{y} - y\bar{x})$$

dans l'espace elliptique (ou sphérique) à 7 dimensions

$$X_1^2 + X_2^2 + \dots + X_8^2 = \frac{4}{3}$$

Quelles sont les propriétés géométriques de cette variété ? Voir à cet égard la fin de ma note aux CR 186, 1928, p. 1817–1819

Il y a là une source de problèmes extrêmement intéressants.

Pour l'indicatrice des courbures dans un espace à n dimensions, il ne me semble pas qu'il y ait de difficultés. Par exemple pour $n = 5$ si on a 3 formes

$$\Phi_3 = a_3\omega_1^2 + 2b_3\omega_1\omega_2 + c_3\omega_2^2$$
$$\Phi_4 = \text{— —}$$
$$\Phi_5 = \text{— —}$$

dans l'espace normal le lieu de l'extrémité du vecteur "courbure normale" décrit la courbe dont les coordonnées sont

$$a_3\cos^2\theta + 2b_3\sin\theta\cos\theta + c_3\sin^2\theta$$
$$a_4\cos^2\theta + \text{— —}$$
$$a_5\cos^2\theta + \text{— —}$$

ou encore

$$\frac{a_3 + c_3}{2} + \frac{a_3 - c_3}{2}\cos 2\theta + b_3\sin 2\theta$$

— —

C'est une ellipse dont le centre est $\left(\frac{a_3+c_3}{2}, —, —\right)$

J'ai indiqué dans mon cours de cette année la propriété caractéristique des réseaux conjugués de déformation projective d'être formé par les courbes qui ont un contact du 3e ordre avec leurs correspondantes pendant qu'on réalise l'application des deux surfaces ; j'ai présenté la chose en partant de l'équation réduite d'une surface. Mais les choses se présentent aussi très simplement avec la méthode du repère mobile. Si on appelle ω_{ij} et $\bar{\omega}_{ij}$ les composantes du déplacement infinitésimal des repères attachés aux deux surfaces, les composantes de l'écart entre deux points correspondants sont du 2e ordre si l'application est du 2e ordre. Si on prend $e_{ij} = \omega_{ij} - \bar{\omega}_{ij}$, ces composantes ~~écrites~~ avec des repères sont

$$-x^2 e_{10} + xy(e_{31} - e_{20})$$
$$-y^2 e_{20} + xy(e_{32} - e_{10})$$
$$0$$

C A R T A N, Elie Joseph - French Mathematician

B. April 9, 1869. Dolomien
D.

WEINER

Leading french mathematician, professor of Geometry at the Sorbonne in

Paris, known for his great achievements in the advancement of modern mathematical theories, contained in his "Lessons on Integral-Variants", in the "Geometry of Riemann-spaces" and his "Courses on complex projective Geometry".

A.L.S. 3½p. 8vo, Le Chesney, July 17, 1928 on paper with letter head "Universite de Paris" addressed, most probably, to prof. Otokar Boruvka of the Masaryk-University at Brno, Moravia, concerning a paper Boruvka sent to prof. E. Picard. Cartan analyses Boruvka's ideas and developes the mathematical formulas concerned.